



## Teză cu subiect unic, semestrul I, 2018-2019

### Matematică \_ filiera teoretică \_ științe ale naturii

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

☐ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

☐ Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

| SUBIECTUL I   |                                                                                                                                                                                   |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6p            | 1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x + \sqrt{x^2 + 16} = 11$ .                                                                                                                |
| 6p            | 2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x + 3 = 2^{x+2}$ .                                                                                                                        |
| 6p            | 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5 x + \log_x 5 = \frac{5}{2}$ .                                                                                        |
| SUBIECTUL II  |                                                                                                                                                                                   |
|               | 1. Se consideră legea de compoziție asociativă definită prin $x \circ y = 20 - 4x - 4y + xy$ , $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$ .                                                  |
| 6p            | a) Demonstrați că mulțimea $M = (4, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea indusă.                                                                    |
| 6p            | b) Demonstrați că $x \circ y = (x - 4)(y - 4) + 4$ , $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$ .                                                                                            |
| 6p            | c) Calculați valoarea expresiei $E = 2^0 \circ 2^1 \circ 2^2 \circ \dots \circ 2^{2018} \circ 2^{2019}$ .                                                                         |
|               | 2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție $x * y = x + y + m$ $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ .                                                                |
| 6p            | a) Să se rezolve ecuația $(x^2 + 2x) * (3x - m) = 6$ în $\mathbb{Z}$ .                                                                                                            |
| 6p            | b) Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ pentru care $e = -2019$ este elementul neutru al legii și apoi determinați mulțimea elementelor inversabile în raport cu legea definită.    |
| 6p            | c) Fie $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , $f(x) = ax + 5$ . Să se determine $a, m \in \mathbb{Z}$ pentru care $f(x * y) = f(x) + f(y)$ , $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ .  |
| SUBIECTUL III |                                                                                                                                                                                   |
|               | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x + m, & x \leq 1 \\ 2e \cdot x - e, & x > 1 \end{cases}$ , $m \in \mathbb{R}$ . |
| 6p            | a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ .                                                                                  |
| 6p            | b) Pentru $m = 0$ determinați mulțimea primitivelor funcției $f$ .                                                                                                                |
| 6p            | c) Studiați monotonia funcției $f$ și determinați eventualele puncte de extrem.                                                                                                   |
|               | 2. Fie funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ , $F(x) = \ln(2x^2 + 2x + 2)$ .                                                        |
| 6p            | a) Să se verifice dacă funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$ .                                                                                                              |
| 6p            | b) Calculați $\int_0^1 f(x) \cdot F^2(x) dx$ .                                                                                                                                    |
| 6p            | c) Să se calculeze $\int_0^1 (x^4 + x^2 + 1) f(x) dx$ .                                                                                                                           |